Primi esercizi sulla ricerca di punti di estremo assoluto

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi II

Richiami di teoria

Il teorema di Weierstrass

Sia

$$K \subset \mathbb{R}^N \text{ un insieme compatto}$$

Sia $f : K \to \mathbb{R}$ un campo scalare continuo su K.
Allora f ammette in K almeno un punto di massimo assoluto e almeno un punto di minimo assoluto, cioè

$$\exists \overrightarrow{x}_m, \overrightarrow{x}_M \in K \ : \ \forall \overrightarrow{x} \in K \qquad \begin{cases} f(\overrightarrow{x}) \geq f(\overrightarrow{x}_m), \\ f(\overrightarrow{x}) \leq f(\overrightarrow{x}_M). \end{cases}$$

Problema:

Dato $K \subset \mathbb{R}^2$ compatto e

$$f : K \to \mathbb{R} \text{ differenziabile,}$$

determinare i punti di minimo e di massimo assoluto di f su K.

Procedimento:

1. cerco i punti di estremo (relativo) per f in $\mathrm{int}(K)$
2. cerco i punti di estremo (relativo) per f su ∂K
3. confronto i risultati ottenuti

Passo 1: cerco i pti. di estremo assol. in $\mathrm{int}(K)$

• È un problema di estremi liberi. Infatti, $\mathrm{int}(K)$ è un insieme aperto: per il Teor. di Fermat, se $(x_0, y_0) \in \mathrm{int}(K)$ è un punto di estremo relativo per f, allora

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$$

Quindi determino tutti i punti di annullamento di ∇f.

Passo 2: cerco i pti. di estremo assol. su ∂K

- È un problema di <u>estremo vincolato</u>, del tipo:

Problema

Data $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\text{determinare i punti } (x, y) \text{ di estremo per } f,$$
$$\underline{\text{vincolati}} \text{ a verificare } g(x, y) = 0,$$

cioè i punti di estremo della restrizione di f all'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x, y) = 0\}.$$

Metodo 1 per il problema di estremo vincolato

- esplicitare il vincolo $g(x, y) = 0$ rispetto a x o a y, per esempio $y = y(x)$

- N.B.: il vincolo può comportare delle limitazioni sulla variabile superstite x (x dovrà variare in un opportuno intervallo I)
- sostituire $y = y(x)$ nell'espressione di f: ottengo una funzione

$$h = h(x) = f(x, y(x))$$

- studio estremi relativi di h (nell'intervallo I!!)

- trovo $x_{\min}$ e $x_{\max}$
- trovo $y_{\min}$ e $y_{\max}$

Metodo 2 per il problema di estremo vincolato

- dare l'equazione del vincolo $g(x, y) = 0$ in
  forma parametrica:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b]$$

- sostituendo l'eq. parametrica in f ottengo una funzione

$$h = h(t) = f(x(t), y(t))$$

- studio estremi relativi di h (nell'intervallo $[a, b]$!!)
- trovo $t_{\min}$ e $t_{\max}$
- trovo $x_{\min}$ e $x_{\max}$, $y_{\min}$ e $y_{\max}$

.... metodo dei moltiplicatori di Lagrange, metodo delle curve di livello..